

Завдання дистанційного туру олімпіади з математики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

(для вступників 2024 року)

1. Знайти число, на яке потрібно поділити число 242, щоб остача від ділення становила одну третину від частки.

2. Побудувати графік функції $y = \sqrt{\sin^4 x + \cos 2x} - \sqrt{\cos^4 x - \cos 2x}$.

3. Розв'яжіть нерівність $\sin \frac{\pi x}{2} \cdot \sqrt{-x^2 + x + 6} \geq 0$. Знайти суму усіх цілих розв'язків.

4. Більша основа рівнобічної трапеції втричі більша за її меншу основу. Площа трапеції дорівнює $64\sqrt{2}$ см². Знайти периметр трапеції, якщо її діагональ поділяє тупий кут навпіл.

5. Розв'язати рівняння $\log_2(\arcsin(4x^2 + 4x + 2)) + 1 = \log_2 \pi$.

6. Визначити усі значення параметрів a та b , при яких рівняння

$$4x^2 + a(x - 1) + b = 0 \text{ задовольняє систему } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

7. Знайти радіус основи і висоту кругового конуса, вписаного в кулю радіуса R так, щоб об'єм конуса був найбільшим.

8. В арифметичній прогресії 11 членів. Перший дорівнює 24. Перший, п'ятий та одинадцятий члени прогресії утворюють геометричну прогресію. Знайти різницю арифметичної прогресії.

9. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2, \\ \frac{xyz}{z+y} = 3, \\ \frac{xyz}{x+z} = 4. \end{cases}$$